

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ОРЕНБУРГСКОЙ ОБЛАСТИ
УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ Г. ОРЕНБУРГА
МОАУ "СОШ № 68"**

РАССМОТРЕНО

руководитель ШМО

Семенова Т.А.
Протокол № 1
от «23» августа 2023 г.

СОГЛАСОВАНО

ЗД по УВР

Беломытцова М.В.
«31» августа 2023 г.

УТВЕРЖДЕНО

директор МОАУ "СОШ
№68"

Сафарова Е.В.
Приказ №
от «31» августа 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

элективного курса

«Замечательные неравенства, их обоснование и применение»

для обучающихся 9 классов

город Оренбург, 2023 год

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью данного курса является изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование методов их получения, а также применение изученного теоретического материала при решении неравенств.

Задачи курса:

- закрепление основ знаний о неравенствах и их свойствах;
- расширение представления о неравенствах;
- формирование умений решать неравенства с переменными;
- повышение общей математической культуры;
- развитие логического мышления обучающихся, культуры речи, способности к умственному эксперименту;
- воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения.

Запланированный данной программой объем знаний необходим для овладения обучающимися методами решения некоторых классов задач оптимизационного характера без применения средств дифференциального исчисления, а также для ознакомления с некоторыми идеями такого раздела современной математики, как выпуклый анализ; решения примеров на установление истинности простейших и более сложных числовых неравенств, встречающихся на ОГЭ по математике.

Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления, использует ряд межпредметных связей, прежде всего с физикой.

Данная программа ориентирована для учащихся 9 классов.

Курс рассчитан на 1 часа в неделю, всего – 34 часа

СОДЕРЖАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

ЧАСТЬ I. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Введение. Предмет, изучению которого посвящен данный курс. Исторические сведения. Преемственная связь с базовым курсом школьной математики. Средние величины и неравенство Коши. О задачах школьных математических олимпиад.

Глава 1. Числовые неравенства и их свойства. Понятие положительного и отрицательного действительного числа, число нуль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше» для действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Понятия «меньше», «не больше» и «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства.

Глава 2. Основные методы установления истинности числовых неравенств. Сравнение двух чисел — значений числовых выражений «по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами (числом), метод введения вспомогательной функции, метод использования «замечательных» неравенств и некоторые другие. Примеры.

Глава 3. Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными. Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применения. Краткое введение. О применении неравенств с параметрами и об умении подбирать, сочинять и обосновывать (а то и опровергать) неравенства с параметрами. Банк-хранилище замечательных неравенств наибольшей востребованности.

Неравенство-следствие. Равносильные (эквивалентные) неравенства. Равносильные задачи на доказательство (установление) или опровержение неравенств. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод синтеза, метод усиления и ослабления, метод подстановки (метод введения новых переменных), метод использования тождеств, метод введения вспомогательных функций, метод уменьшения или увеличения числа переменных, метод понижения степеней выражений, образующих левую или правую части неравенства, метод интерпретаций или моделей (векторных, тригонометрических, физических). Примеры.

Глава 4. Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Индукция вообще и в математике в частности. Система аксиом Дж. Пеано. Схема применения принципа (аксиомы) математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции. Примеры. Две теоремы о сравнении соответствующих членов двух последовательностей с помощью сравнения разности или отношения двух соседних

членов одной последовательности с разностью или отношением двух членов другой последовательности. Примеры.

Глава 5. Неравенство Коши—Буняковского и его применение к решению задач. Формулируется и обосновывается теорема, устанавливающая соотношение Коши—Буняковского и дающая критерий реализации этого соотношения в варианте равенства. Примеры. Геометрическая интерпретация неравенства Коши—Буняковского. Векторный вариант записи этого неравенства.

Глава 6. Неравенства подсказывают методы их обоснования.

а) Метод Штурма. Примеры.

б) Использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенства.

в) Геометрические неравенства, устанавливающие соотношения между длинами сторон треугольника.

Дополнительным разделом как источником тренировочных задач для развития навыков преобразования выражений является раздел «Условные тождества».

Часть II. Средние величины: их свойства и применение

Введение. «Средние» в средней школе. Многообразие средних величин.

Глава 7. Средние степенные величины: соотношения между ними и другие источники замечательных неравенств.

Введение. Средние величины в школьном курсе математики, физики. Многообразие «средних».

а) Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое и соотношение между ними в случае двух параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

б) Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое, их существование и свойства.

в) Симметрические средние. Теорема Мюрхеда. Круговые неравенства и методы их доказательства.

г) Среднее арифметическое взвешенное и его свойства. Координаты центра масс конечной системы материальных точек.

д) Средние степенные и средние взвешенные степенные и их свойства. Примеры. Вывод неравенства Коши—Буняковского с помощью тождества Лагранжа.

Глава 8. Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.

Введение. Исторический экскурс. П.Л.Чебышев и его научное наследие.

а) Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности. Одномонотонная последовательность как результат обобщения понятия монотонных последовательностей и обнаружения некоторой «симметричности» выражений, составляющих левую и правую части неравенства Чебышева.

б) Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши—Буняковского.

Глава 9. Генераторы замечательных неравенств.

Перечисляются основные способы получения замечательных неравенств, причем как ранее уже изученные (идет повторение ранее пройденного), так и совершенно новые.

а) Свойства квадратичной функции — источник простейших неравенств.

б) Неравенство треугольника.

в) Свойства одномонотонных последовательностей — источник замечательных неравенств:

1) Свойства двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей. Примеры. Свертка двух последовательностей.

2) Свойства одномонотонных последовательностей произвольной длины и их применение. Примеры.

3) Одномонотонность нескольких последовательностей, их свойства и применения. Примеры.

4) Обобщения. Итоги. Применения изученных понятий и их свойств к получению новых замечательных неравенств. Неравенства, обобщающие одновременно и неравенство Коши—Буняковского, и неравенство Чебышева.

г) Неравенство Иенсона. Введение. Историческая справка. Краткий обзор результатов. Выпуклый анализ — раздел современной математики.

1) Свойства центра масс конечной системы материальных точек.

2) Выпуклые фигуры и выпуклые функции. Надграфик и подграфик функции. Неравенство Иенсона и его доказательство. Простейшие примеры применения.

Теорема о связи свойств выпуклости надграфика или подграфика функции с ее выпуклостью или вогнутостью.

3) Выпуклость фигур и свойства центра масс конечной системы материальных точек.

4) Исследование функций на выпуклость и вогнутость средствами математического анализа. Неравенство Коши—Гельдера и неравенство Минковского.

Достаточные условия вогнутости и выпуклости функции, заданной на указанном промежутке, в терминах ее производных первого и второго порядка (две основные теоремы разной степени общности и «тонкости»).

Примеры (таблица) функций, чья выпуклость или вогнутость устанавливается вышеуказанными теоремами. Конкретные виды неравенства Иенсона, порожденные функциями из таблицы. Неравенство Коши—Гельдера. Неравенство Минковского и другие примеры.

Замечание. Теоретический материал данной главы достаточно труден для изучения учащимися, поэтому учитель вполне может ограничиться рассмотрением лишь части данного материала, опираясь на наглядность и очевидность соответствующих свойств графиков конкретных функций и записав именно для них неравенство Иенсона с конкретным количеством параметров и конкретными значениями весов. Например, он может это сделать для логарифмической функции с выходом на получение неравенства Коши.

Глава 10. Применение неравенств. Задача Дидоны (упрощенный вариант) и другие задачи на оптимизацию. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Личностные результаты освоения программы характеризуются:

1) патриотическое воспитание:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданское и духовно-нравственное воспитание:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудовое воспитание:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетическое воспитание:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценности научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением простейшими навыками исследовательской деятельности;

6) физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологическое воспитание:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптация к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределённости, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, в том числе формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Познавательные универсальные учебные действия

Базовые логические действия:

- выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;
- воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие, условные;
- выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;
- делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;
- разбирать доказательства математических утверждений (прямые и от противного), проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные рассуждения;
- выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

- использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
- проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой;
- самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
- прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией:

- выявлять недостаточность и избыточность информации, данных, необходимых для решения задачи;
- выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;
- выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями;
- оценивать надёжность информации по критериям, предложенным учителем или сформулированным самостоятельно.

Коммуникативные универсальные учебные действия:

- воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;
- в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;
- представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории;
- понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных математических задач;
- принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы, обобщать мнения нескольких людей;
- участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнениями, мозговые штурмы и другие), выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды, оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

Регулятивные универсальные учебные действия

Самоорганизация:

- самостоятельно составлять план, алгоритм решения задачи (или его часть), выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

Самоконтроль, эмоциональный интеллект:

- владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;
- предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, найденных ошибок, выявленных трудностей;
- оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения цели, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Знать:

- определение числового неравенства и его свойства;
- определение средних величин и их свойства;
- понятие положительного и отрицательного числа, числа нуль;
- основные законы сложения и умножения чисел; понятия «больше», «меньше», «не больше», «не меньше» их геометрические интерпретации и свойства;
- как сравнивать два числовых выражения «по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточным числом;
- различные методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод подстановки; отработать эти методы на примерах;
- частные случаи неравенства Коши и уметь их применять;
- понятие индукции вообще и в математике в частности; схему применения принципа математической индукции и некоторые ее модификации на примерах;
- неравенство Коши для произвольного числа переменных; его функциональное доказательство и некоторые неравенства, эквивалентные неравенству Коши;
- понятие угла между векторами; сформулировать и обосновать теорему, устанавливающую соотношение Коши-Буняковского;
- геометрическую интерпретацию неравенства Коши-Буняковского и векторный вариант записи этого неравенства; решить задания на применение неравенства Коши-Буняковского;
- методы обоснования неравенств: метод штурма; использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенства; геометрический метод;

- понятия среднего арифметико-геометрического Гаусса и среднего арифметико-гармонического, их свойства;
- теорему Мюрхеда; рассмотреть круговые неравенства и их доказательства на примерах;
- простейший вариант неравенства Чебышева и его обобщение;
- квадратичную функцию и основные свойства квадратичной функции как источник простейших неравенств;
- неравенство треугольника; решить задания на квадратичную функцию и неравенства треугольника;
- свойства двучленных и трехчленных одномонотонных последовательностей; ввести понятие свертки двух последовательностей;
- неравенство Иенсона, его доказательство и простейшие примеры применения.

Уметь:

- правильно употреблять математическую терминологию;
- работать с литературными источниками, находить и использовать информацию в бумажных и электронных изданиях;
- исследовать функцию на выпуклость, вогнутость;
- находить наибольшее и наименьшее значения функции с помощью замечательных неравенств;
- применять неравенства при решении статистических и оптимизационных задач;
- решать задания на применение различных методов установления истинности неравенств с переменными;
- применять принцип математической индукции при решении заданий;
- решать задания по изученному материалу;
- решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции с помощью замечательных неравенств.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№	Наименование разделов и тем программы	Количество часов	Электронные (цифровые) образовательные ресурсы
1	Замечательные неравенства	12	https://www.yaklass.ru https://infourok.ru
2	Средние величины: их свойства и применение	22	https://www.yaklass.ru https://infourok.ru
ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО ПРОГРАММЕ		34	

ПОУРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ п/п	Тема урока	Количество часов	Дата изучения
Замечательные неравенства (12 часов).			

1	Числовые неравенства и их свойства.	1	
2	Основные методы установления истинности числовых неравенств.	1	
3	Основные методы установления истинности числовых неравенств. Решение задач.	1	
4	Решение задач на установление истинности неравенств с переменными.	1	
5	Решение задач на установление истинности неравенств с переменными.	1	
6	Частные случаи неравенства Коши.	1	
7	Метод математической индукции.	1	
8	Метод математической индукции. Решение задач.	1	
9	Неравенство Коши для произвольного числа переменных.	1	
10	Неравенство Коши-Буняковского.	1	
11	Неравенство Коши-Буняковского и его применение к решению задач.	1	
12	Неравенства подсказывают методы их обоснования.	1	
Средние величины: их свойства и применение (22 часа).			
13	Среднее арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух параметров.	1	
14	Геометрические интерпретации.	1	
15	Среднее арифметико-геометрическое Гаусса и среднее арифметико-гармоническое.	1	
16	Симметрические средние. Круговые неравенства.	1	
17	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства.	1	
18	Средние степенные и средние взвешенные степенные.	1	
19	Средние степенные и средние взвешенные степенные. Решение задач.	1	
20	Неравенство Чебышева.	1	
21	Обобщающие неравенства.	1	
22	Свойства квадратичной функции; геометрические модели.	1	
23	Свойства квадратичной функции; геометрические модели. Решение задач.	1	
24	Свойства одномонотонных последовательностей.	1	
25	Свойства одномонотонных последовательностей Решение задач.	1	
26	Одномонотонные последовательности.	1	
27	Неравенство Иенсона.	1	
28	Неравенство Иенсона. Решение задач.	1	
29	Исследование функции на выпуклость и вогнутость.	1	
30	Неравенства Коши-Гельдера и Минковского.	1	
31	Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи	1	

	на оптимизацию.		
32	Неравенства в математической статистике и экономике. Задачи на оптимизацию.	1	
33	Поиск наибольших и наименьших значений функций.	1	
34	Промежуточная аттестация. Итоговая контрольная работа.	1	